# Лабораторная работа № 4 алгебраические фракталы

**Цель лабораторной работы**

Получение навыков работы с итерационными процессами и закрепление навыков разработки методов и работы с 2D графикой на языке программирования C#.

**Постановка задачи**

Фрактал – геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, согласно которому часть фигуры подобна ей целой. Выделяют следующие типы фракталов.

1) Геометрические фракталы – их получают с помощью ломаной (2D) или поверхности (3D), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

2) Алгебраические фракталы – строятся на основе алгебраических формул.

3) Стохастические фракталы – получаются, если в итерационном процессе хаотически менять какие-либо его параметры.

Рассмотрим алгебраические фракталы. Их получают при исследовании нелинейных динамических систем (отсюда другое название – динамические). Поведение такой системы можно описать комплексной нелинейной функцией – многочленом вида

.

В частном случае данная функция принимает вид

 или .

Возьмем какую-нибудь начальную точку  на комплексной плоскости. Теперь рассмотрим бесконечную последовательность чисел на комплексной плоскости, каждое следующее из которых получается из предыдущего:

.

В зависимости от начальной точки  такая последовательность может вести себя по-разному: стремиться к бесконечности при ; сходиться к какой-то конечной точке; циклически принимать ряд фиксированных значений; возможны и более сложные варианты.

1. Фрактал Мандельброта.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел:

.

Множество точек , для которого эта последовательность не расходится, называется множеством *Мандельброта*. Для построения его графической интерпретации нужно определить исходные данные:

* Прямоугольное окно *w* x *h* (*w* – ширина окна, *h*- высота окна);
* Значение  – минимальный радиус расходимости множества Мандельброта.
* Максимальное число итераций .

Если точка  вышла за пределы круга радиуса при , то процесс вычисления останавливается.

Используя замену , разложим  на действительную и мнимую части:



Таким образом, чтобы построить фрактал, необходимо для каждой точки  запустить следующий итерационный процесс:



где и .

Составим матрицу M, элементы которой  равны номерам итераций, на которых процесс был остановлен. Далее матрицу можно вывести на экран как растровое изображение, предварительно сопоставив каждому числу из интервала  некоторый цвет. Пример визуализации множества Мандельброта приведен на рисунке 1.

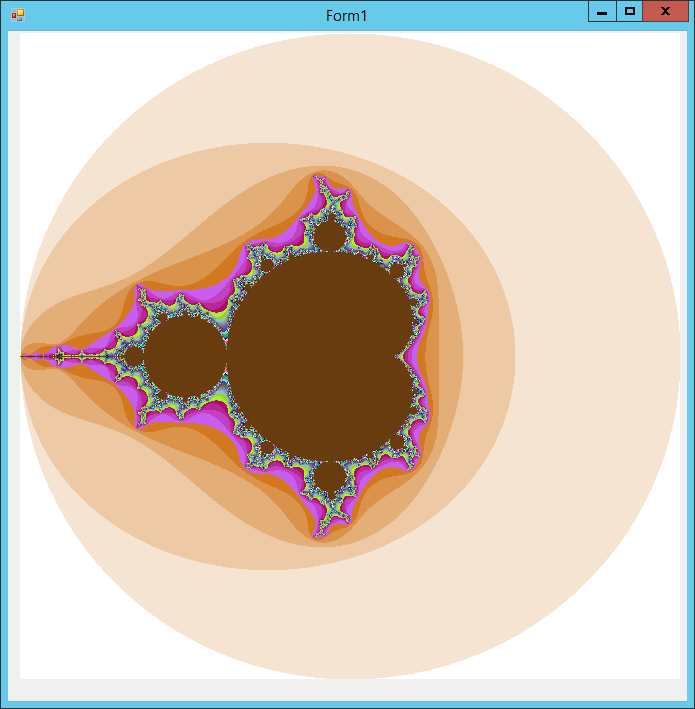


Рисунок 1 – Множество Мандельброта

2. Фрактал Жюлиа.

Рассмотрим ту же последовательность комплексных чисел, что и для множества Мандельброта



Множеством *Жюлиа* полинома  называется такое подмножество множества комплексных чисел, для каждой точки которого поведение функции под действием итераций является хаотичным, т.е. небольшие изменения в начальных условиях в некоторой небольшой окрестности начальной точки, значительно влияют на траекторию.

Исходные данные, этапы построения и условия остановки – те же, что и для множества Мандельброта, за исключением:

* значение  фиксируется, например: ;
* начальное значение  перебирается дискретно в области .

Рассматривая множество в общем виде  и изменяя  и , можно получать разнообразные фракталы.

На рисунке 2 представлен пример отображения фрактала Жюлиа при , .

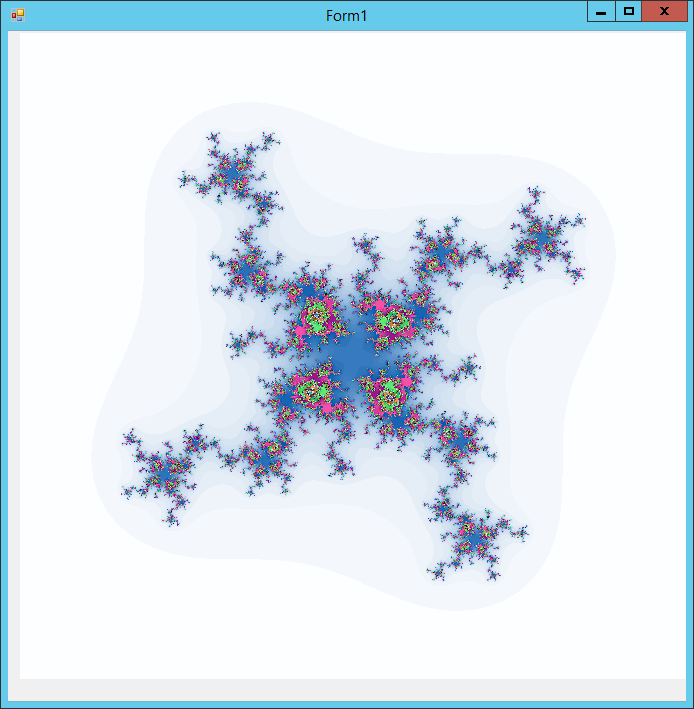


Рисунок 2 – Фрактал Жюлиа

3. Бассейны Ньютона.

Для построения, фракталов, называемых *бассейнами Ньютона*, используется метод приближенных итераций нахождения корней нелинейного уравнения алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости.

Рассмотрим уравнение:

.

Оно имеет три корня. При выборе различных  процесс будет сходиться к различным корням (областям притяжения). Границы этих областей имеют фрактальную структуру.

Общая формула метода Ньютона имеет вид:

.

Подставив  в формулу метода, получим итерационную формулу для построения фрактала:

.

Итерационный процесс останавливается при:

.

Для построения графической интерпретации, так же, как и для фрактала Мандельброта, используется матрица, элементы которой равны номеру итерации, на которой остановился процесс (рисунок 3).

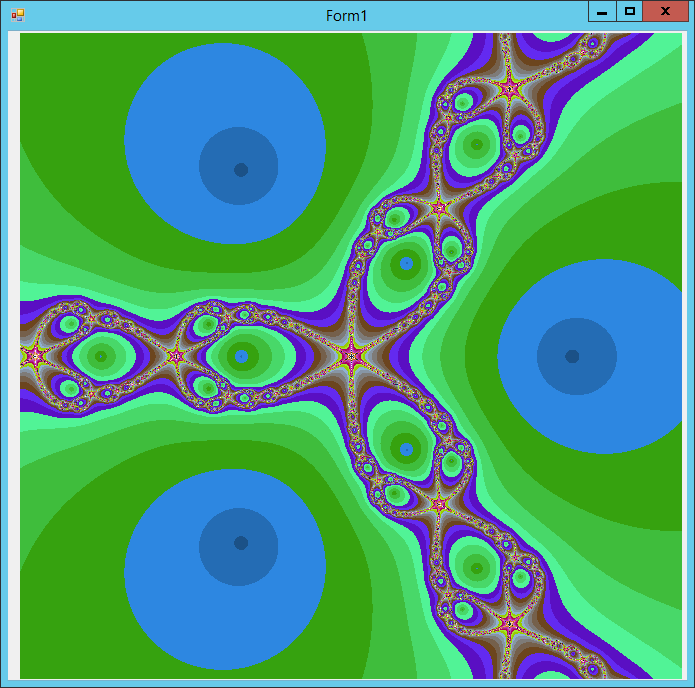


Рисунок 3 – Бассейн Ньютона

Псевдокод рисования фрактала:

Цикл i, j по пикселям в PictureBox:

x, y = Преобразование индексов в координаты на комплексной плоскости(i, j)

iter = Итерационный процесс до условия остановки(x, y)

r, g, b = Преобразование числа итераций в цвет(iter)

Раскраска пикселя(i, j, r, g, b)

Псевдокод метода:

Итерационный процесс до условия остановки(x, y)

iter = 0

Цикл пока (x\*x+y\*y<4 И iter < max\_iter)

x, y = комплексная\_функция(x, y)

iter = iter + 1

Вернуть iter

**Рисование в PictureBox по пикселям**

Для рисования фракталов необходимо закрашивать каждый пиксель по отдельности. Для этого необходимо добавить элемент **PictureBox** на форму (рисунок 4).

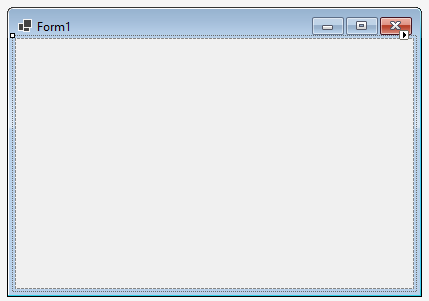


Рисунок 4 – Пустая форма с PictureBox для рисования

Далее в качестве примера рассмотрим градиентное закрашивание окна. Код программы выглядит следующим образом:

private void Form1\_Load(object sender, EventArgs e)

{

pictureBox.Image = new Bitmap(

pictureBox.Width, pictureBox.Height);

// Рисование происходит на объекте Bitmap

using var bitmap = (Bitmap)pictureBox.Image;

for (var x = 0; x < bitmap.Width; x++)

{

for (var y = 0; y < bitmap.Height; y++)

{

// Цвет меняется линейно слева направо и сверху вниз

// Red меняется по y, Blue – по x

var r = (int)(255.0 \* y / bitmap.Height);

var b = (int)(255.0 \* x / bitmap.Width);

bitmap.SetPixel(x, y, Color.FromArgb(r, 0, b));

}

}

}

Результат работы программы представлен на рисунке 5.

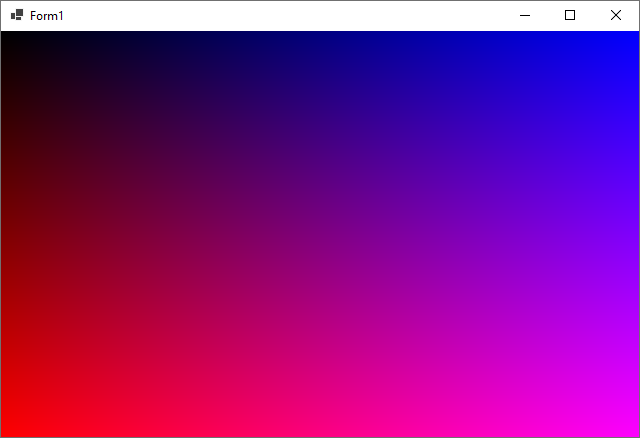


Рисунок 5 – Градиентное раскрашивание PictureBox

**Задание на лабораторную работу**

Построить алгебраический фрактал

1. Реализовать итерационный процесс построения алгебраического фрактала.

2. Реализовать следующий функционал программы:

* задание параметров фрактала;
* задание размеров комплексной области (начальный размер);
* увеличение выбранного участка фрактала. Участок определяется прямоугольной областью, выделяемой курсором мыши. Если соотношение сторон области не соответствует соотношению сторон окна рисования, то область дополняется (увеличивается) до соответствия;
* выбор палитры рисования.

3. Программа должна быть задокументирована с помощью комментариев.

4. Вся вычислительная логика программы должна быть инкапсулирована в отдельном классе (или множестве классов). В классе формы должно быть только обращение к вычислительной логике для изменения состояния, пересчета и получения результатов.

5. Логика рисования должна быть в классе формы.

6. Рисование должно производиться на PictureBox.

**Содержание пояснительной записки**

Пояснительная записка должна содержать:

1) формулировка задания;

2) алгоритм решения задачи;

3) краткое описание программы;

4) скриншоты работы программы

5) листинг программы.

**Варианты заданий на лабораторную работу**

1 (5, 9, 13, 17, 21, 25). Фрактал Мандельброта, , .

2 (6, 10, 14, 18, 22). Множество Жюлиа, , .

3 (7, 11, 15, 19, 23). Бассейн Ньютона, , .

4 (8, 12, 16, 20, 24). Бассейн Ньютона, , .

**Контрольные вопросы**

1. Назовите особенности фракталов.
2. Чем отличаются алгебраические фракталы от других фракталов?
3. Какие события используются при реализации увеличения выбранной области фрактала?
4. Примеры применения фракталов на практике.